IAN
STEWART

Mon cabinet de curiosités mathématiques

Champs sciences

MON CABINET
DE CURIOSITÉS
MATHÉMATIQUES

Du même auteur

Dieu joue-t-il aux dés ? Les nouvelles mathématiques du chaos, Flammarion, 1992 ; « Champs », 2014.

La Nature et les Nombres, Hachette, 1998.

L'Univers des nombres, Belin, 2000.

Ta moitié est plus grande que la mienne, Dunod, 2007.

Arpenter l'infini. Une histoire des mathématiques, Dunod, 2010.

La Chasse aux trésors mathématiques, Flammarion, 2010 ; « Champs », 2018.

Les Divagations mathématiques de Ian Stewart, Dunod, 2011.

Les Mathématiques du vivant ou la Clef des mystères de l'existence, Flammarion, 2013 ; « Champs », 2016.

Dix-sept équations qui ont changé le monde, Robert-Laffont, 2014 ; « Champs », 2022.

La Science du disque-monde (avec Jack Cohen et Terry Pratchett), 4 vol., Atalante, 2007-2015.

Qu'est-ce que les mathématiques ? Une approche élémentaire des idées et des méthodes (avec Richard Courant et Herbert Robbins), Cassini, 2018.

Les Dés jouent-ils aux dieux ? Les mathématiques de l'incertitude, Dunod, 2020.

Petites énigmes mathématiques et logiques, Librio, 2021.

Ian Stewart

MON CABINET DE CURIOSITÉS MATHÉMATIQUES

Traduit de l'anglais par Laurence Decréau
avec la collaboration scientifique d'Anthony Truchet

Champs sciences

L'édition originale est parue sous le titre :
Professor Stewart's Cabinet of Mathematical Curiosities
aux éditions Profile Books LTD,
Londres, 2008

ISBN : 978-2-0804-3136-3

C'EST PARTI !

Il y a trois sortes de gens :
Ceux qui savent compter, et les autres.

À l'âge de quatorze ans, j'ai commencé à prendre des notes dans un carnet. Un carnet de maths. Non, je ne suis pas un cas pathologique : ces maths n'avaient rien de scolaire... Je notais sur mon calepin tout ce que je pouvais dénicher d'amusant sur les maths *en dehors* du programme scolaire. C'est-à-dire beaucoup : je dus vite m'acheter un second carnet.

Soit, je suis un cas pathologique. Mais avez-vous saisi le message ? Les maths ne se résument pas à celles qu'on fait à l'école. Mieux : celles qu'on n'y fait pas sont passionnantes. On s'amuse souvent beaucoup, avec les maths. Surtout quand il n'y a ni examen au bout ni calculs à vérifier.

Bientôt, j'eus six carnets, que j'ai conservés jusqu'à aujourd'hui. Dès que j'eus découvert les vertus de la photocopieuse, leur contenu s'est réparti entre les intercalaires d'un classeur. Ces *Curiosités* en sont un échantillon. Vous y trouverez un mélange de jeux, d'énigmes, d'histoires et de faits mathématiques étonnants. La plupart des articles se lisent indépendamment les uns des autres : libre à vous d'aller piquer n'importe où. Quelques-uns se regroupent en brefs feuilletons... J'ai tendance à penser que les miscellanées se doivent de tout mélanger ; cet ouvrage est un livre de miscellanées.

Parmi les jeux et les énigmes, il y a là quelques vieux classiques qu'on voit toujours réapparaître avec la même délectation. Mais on découvrira beaucoup de nouveautés conçues tout exprès pour ce livre. J'ai fait de mon mieux pour varier les plaisirs, aussi trouvera-t-on de tout, énigmes de logique, de géométrie, de probabilités, de nombres, bizarreries mathématiques, problèmes et défis...

L'avantage, quand on sait un peu de maths, c'est qu'on peut complètement épater ses amis. (Un conseil, toutefois : mieux vaut rester modeste, sous peine de les barber carrément.) Pour atteindre ce but enviable, un bon moyen est d'être prêt à rebondir sur les derniers sujets à la mode. À cette fin, j'ai parsemé mon livre de quelques brefs « essais » rédigés dans un style plaisant, sans aucun terme technique. On y trouvera les explications relatives à des avancées récentes qui ont fait beaucoup de bruit. Par exemple, vous vous rappelez sans doute l'émission de télévision consacrée au dernier théorème de Fermat ? Et le théorème des quatre couleurs, la conjecture de Poincaré, la théorie du Chaos, les fractales, la complexité, les pavages de Penrose... Oh ! Vous trouverez aussi, bien sûr, des problèmes non résolus, histoire de rappeler que les mathématiques n'ont pas dit leur dernier mot. Certains sont drôles, d'autres sérieux – tel le problème « P = NP ? », qui rapportera à celui qui saura le résoudre un prix de 1 million de dollars (environ 750 000 euros). Si vous n'avez jamais entendu parler du problème, soyez au moins au courant du prix...

Dans des passages plus courts, je rapporte des faits et découvertes intéressants sur des sujets connus mais toujours fascinants, tels que π, les nombres premiers, le théorème de Pythagore, les interpolations, les pavages... Enfin, j'ai glissé quelques anecdotes amusantes sur des mathématiciens célèbres – pour la touche historique, et pour sourire ensemble de leurs innocentes manies.

J'ai dit que vous pouviez piquer où bon vous semblait, et c'est vrai. Mais à parler franchement, mieux vaut sans doute commencer par le commencement et butiner en suivant plus ou moins l'ordre des pages. Certains articles sont utiles à la compréhension de ceux qui suivent. Et les premiers tendent à être plus faciles, tandis que les derniers seraient plus...

stimulants. Mais j'ai veillé à glisser partout des choses aisées à comprendre, afin de ménager vos neurones.

Mon ambition est de faire vibrer votre imagination en vous présentant ce que les mathématiques peuvent avoir d'amusant et de surprenant. Je veux vous divertir, mais mon bonheur serait à son comble si ces *Curiosités* pouvaient vous amener aux maths, vous faire goûter au frisson de la découverte et vous donner envie d'en savoir plus sur les grandes questions – qu'elles datent de 4 000 ans, de la semaine dernière ou nous projettent vers demain.

Ian Stewart, Coventry, janvier 2008.

1. Star Truc

Le capitaine Cric et M. Schnock déambulaient sur la planète Noncomposmentis [1] où ils s'étaient téléportés, laissant leur vaisseau *L'Indéfendable* en orbite.

« Si j'en crois le *Guide vert de la galaxie*, il y a deux espèces d'aliens intelligents sur cette planète, dit Cric.

— Exact, capitaine. Les Véraciteux et les Baratineux. Tous parlent le galactique, mais on les distingue à leur façon de répondre aux questions. Les Véraciteux disent toujours la vérité, tandis que les Baratineux mentent systématiquement.

— Mais physiquement…

— Rien ne les différencie, capitaine. »

Un bruit derrière lui fit sursauter Cric. Il se retourna pour se retrouver nez à nez avec trois aliens qui s'approchaient à pas de loup. Ils se ressemblaient comme trois gouttes d'eau.

« Bienvenue à Noncomposmentis, dit l'un.

— Merci. Mon nom est Cric. Vous êtes… » Cric s'interrompit. « À quoi bon leur demander leurs noms, marmonna-t-il. Pour ce que nous en savons, ils ont de bonnes chances d'être faux.

— Très logique, capitaine, approuva Schnock.

— Veuillez nous excuser, mais nous parlons très mal le galactique, improvisa Cric. Alors si cela ne vous dérange pas, je vais vous appeler Alfie, Betty et Gemma », dit-il en les désignant tour à tour. « Pour ce que nous savons de leur sexe…, souffla-t-il à l'oreille de Schnock.

— Ils sont hermaphromobisexuels. Tous.

— Peu importe. Voyons, Alfie : à quelle espèce appartient Betty ?

— Baratineux.

— Ah… Dites-moi Betty, est-ce qu'Alfie et Gemma appartiennent à des espèces différentes ?

---

1. NdT : en latin, *non compos mentis* signifie « qui n'est pas dans son bon sens ».

— Non.

— Bien… Voilà ce qui s'appelle avoir de la conversation. Je… Gemma : à quelle espèce appartient Betty ?

— Véraciteux. »

Cric hocha la tête d'un air entendu.

« Ça y est, c'est réglé.

— Qu'est-ce qui est réglé, capitaine ?

— L'espèce à laquelle chacun appartient.

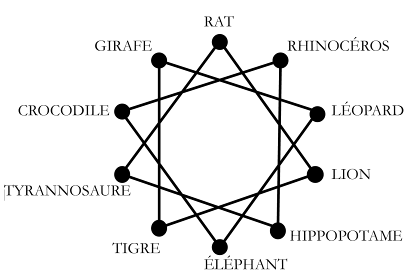
— Je vois. Et donc ?

— Je n'en ai pas la moindre idée, Schnock. C'est vous qui êtes censé avoir l'esprit logique ! »

Réponse page 294.

2. Marelle des animaux

C'est un merveilleux tour de mathématiques pour enfants. Chaque joueur choisit un animal et épelle son nom. À chaque lettre, vous (ou un enfant) posez votre doigt sur un des sommets de l'étoile à dix branches. Il faut toujours partir du point « Rhinocéros » et suivre la ligne dans le sens des aiguilles d'une montre. Miracle : quand l'enfant prononce la dernière lettre, votre doigt s'arrête justement sur l'animal qu'il avait choisi…



Épelle le nom pour trouver l'animal.

Quel est le truc ? Très simple : le troisième mot est Rat, qui a trois lettres ; le quatrième est Lion, qui en a quatre, et ainsi de suite. Pour camoufler l'astuce, les animaux en position 0, 1 et 2 comportent respectivement 10, 11 et 12 lettres : comme à 10 on retombe sur Rhinocéros, tout marche comme sur des roulettes.

Pour un camouflage encore plus efficace, mettez des images à la place des noms. Dans le schéma ci-dessus, j'ai écrit les noms pour plus de clarté.

3. Curiosités arithmétiques

Votre calculette peut exécuter des tours de mathématiques.

1 – Effectuez ces multiplications. Qu'observez-vous ?

1 × 1
11 × 11
111 × 111
1 111 ×1 111
11 111 × 11 111

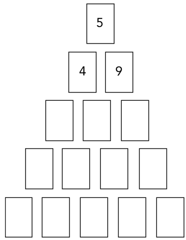
2 – Si l'on poursuit en augmentant le nombre de 1, retrouve-t-on le même schéma ?

Tapez le nombre 142 857 et multipliez-le par 2, 3, 4, 5, 6 et 7. Que remarquez-vous ?

Réponse p. 294.

4. Triangle de cartes

J'ai quinze cartes, numérotées de 1 à 15, que je dois disposer en triangle. J'ai indiqué ici les numéros des trois premières, vous allez comprendre pourquoi.



Triangle de cartes.

On ne les pose pas dans n'importe quel ordre : chaque carte doit être le résultat de la différence entre les deux de dessous, à gauche et à droite. Par exemple, 5 est la différence entre 4 et 9. (La différence doit être positive.) Mais cette règle ne s'applique pas à la rangée du bas.

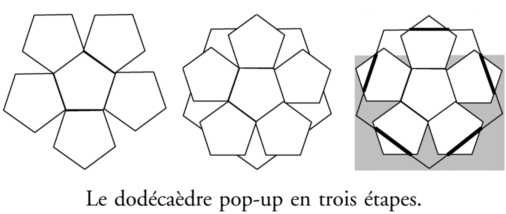
Les trois cartes du sommet sont déjà correctement placées. À présent, pouvez-vous disposer les douze qui restent ?

Les mathématiciens ont trouvé de tels *triangles absolus* à deux, trois ou quatre rangées, constitués de nombres entiers successifs à partir de 1. On a démontré qu'il ne pouvait exister aucun triangle absolu de six rangées ou plus.

Réponse p. 295.

5. Le dodécaèdre pop-up

Le dodécaèdre est un solide formé de douze pentagones. Il appartient à la famille des solides réguliers (voir p. 204).

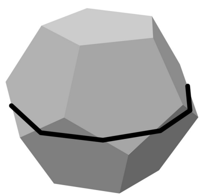


Le dodécaèdre pop-up en trois étapes.

Découpez une feuille de carton pour obtenir deux exemplaires de la figure de gauche (dimension : 10 cm de côté). Marquez nettement les plis aux intersections pour que les cinq rabats pentagonaux soient bien souples. Placez les deux découpages l'un sur l'autre, comme sur la figure du milieu. Faites passer un élastique alternativement par-dessus et par-dessous, comme sur la figure de droite (les traits gras indiquent les endroits où l'élastique passe par-dessus), tout en maintenant les découpages à plat avec le doigt.

Ôtez votre doigt.

Si vous avez choisi la bonne taille et la bonne épaisseur d'élastique, vous verrez se dresser sous vos yeux un magnifique dodécaèdre à trois dimensions...



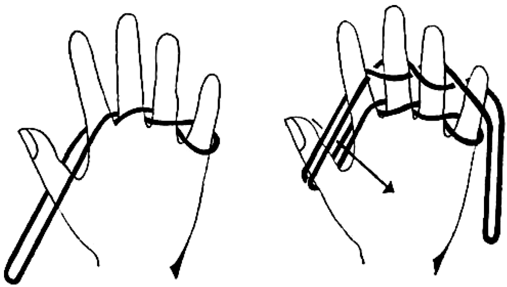
Et le dodécaèdre fut !

6. Les doigts coupés

Comment enrouler une ficelle autour de vos doigts – ou ceux d'un volontaire – de telle sorte que quand vous tirez, elle semble les trancher net ?

On sait par expérience que si la ficelle est pour de bon attachée aux doigts, elle ne peut pas glisser : voilà toute l'astuce. Plus précisément : imaginez que vos doigts soient appuyés sur une surface qui empêche la ficelle de glisser par en haut. Tout se passe comme si vous arriviez à libérer cette ficelle des interstices séparant vos doigts de la table. Si la ficelle était vraiment enroulée autour des doigts, on ne pourrait pas la retirer : il faut donc qu'elle ait l'air attachée sans l'être vraiment.

Ne vous trompez pas, ou elle vous coupera les doigts : attention !



Comment (ne pas) se couper les doigts.

Qu'y a-t-il de mathématique dans ce tour ? C'est qu'il relève de la topologie, une branche des mathématiques apparue il y a cent cinquante ans et sur laquelle repose tout ceci. La topologie s'intéresse aux propriétés de ce qui est noué ou attaché – aux caractéristiques géométriques invariantes malgré les transformations drastiques imposées au système. Par exemple, on a beau tordre une ficelle ou lui tirer dessus, un nœud reste un nœud.

Prenez de la ficelle, faites-en une boucle d'un mètre. Passez-la autour de votre auriculaire gauche, croisez les deux brins et passez autour du majeur, puis croisez de nouveau dans le même sens, et ainsi de suite jusqu'à ce que votre ficelle arrive au pouce (voir figure de gauche). Faites-la passer derrière votre pouce puis ramenez-la devant, et entourez derechef chacun de vos doigts en suivant l'ordre inverse (voir figure de droite). Vérifiez bien qu'au retour la ficelle passe autour du doigt en sens inverse de l'aller. Ramenez votre pouce sur la paume en libérant la ficelle. Tirez d'un coup sec sur la boucle qui pend du côté du petit doigt... et vous entendrez le bruit de la ficelle tranchant vos doigts. Pourtant, miracle : vous n'avez rien !

À moins que vous n'ayez par mégarde enroulé la ficelle dans le mauvais sens...

7. Les bons comptes font les bons navets

« L'année a été bonne pour les navets, fit observer le fermier Dupurin à son voisin Dupré.

— Pour ça oui, répondit l'autre. Combien qu't'en as ramassé ?

— Je n'sais plus au juste. Tout ce que j'puis dire, c'est que quand je les ai eu emportés au marché, au bout d'une heure, j'en avais vendu les six septièmes, plus un septième de navet.

— Ça n'a point dû être simple à couper, c't'affaire-là...

— Mais non, j'n'en ai point coupé, j'en ai vendu un nombre tout rond.

— Si tu l'dis... Et après ?

— Après, dans la seconde heure, j'avais vendu les six septièmes de ce qui m'restait, plus un septième de navet. Et puis dans la troisième heure, j'avais encore vendu les six septièmes du restant de mes navets, plus un septième de navet. Et pour finir, dans la quatrième heure, j'avais encore vendu les six septièmes de mon reste de navets, et un septième de navet. Alors, je m'suis rentré.

— Pourquoi ?

— Dame, parce que j'avais tout vendu ! »

Combien de navets Dupurin avait-il emportés au marché ?

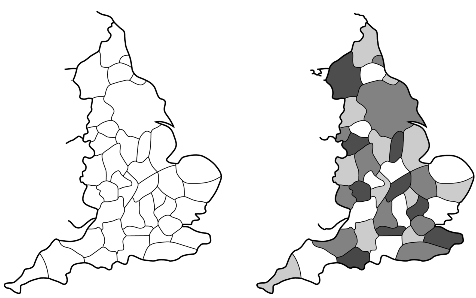
Réponse p. 296.

8. Le théorème des quatre couleurs

Certains problèmes peuvent être très simples à énoncer mais extrêmement difficiles à résoudre. J'en veux pour preuve le célèbre théorème des quatre couleurs. Tout commence en 1852, avec la lettre qu'envoie à son jeune frère Frederick un étudiant de l'University College de Londres, Francis Guthrie.

Cette lettre contient ce que Guthrie prend pour une petite énigme banale. Alors qu'il coloriait une carte des comtés d'Angleterre, il s'est en effet aperçu qu'avec seulement quatre couleurs il pouvait tout colorier sans que jamais deux comtés limitrophes aient la même couleur. Il se demanda donc s'il s'agissait là d'une particularité de la carte d'Angleterre ou d'une propriété plus générale. « Est-il possible de colorier n'importe quelle carte du plan de façon que deux régions adjacentes ne soient jamais de la même couleur ? » écrit-il.

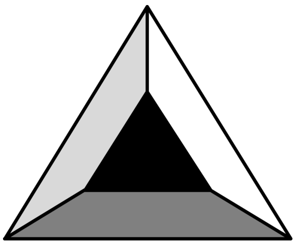
Il a fallu 124 ans pour que vienne la réponse, encore ne la devons-nous qu'à l'assistance considérable d'ordinateurs. On ne connaît aucune démonstration conceptuelle simple du théorème des quatre couleurs – rien qu'un être humain puisse vérifier, étape après étape, en un peu moins d'une vie.



La carte des comtés d'Angleterre coloriée en quatre couleurs (une solution parmi beaucoup d'autres).

Frederick Guthrie ne put répondre à la question de son frère, mais il connaissait, dit-il, « un homme qui en était capable » – le célèbre mathématicien Augustus De Morgan. Or, il apparut vite que De Morgan *n'*en était *pas* capable, comme il l'avoua en octobre de la même année dans une lettre à Sir William Rowan Hamilton, mathématicien irlandais encore plus célèbre. On démontre aisément qu'il faut *au moins* quatre couleurs pour certaines cartes, car elles contiennent quatre régions qui se touchent toutes les unes les autres. C'est le cas de la carte des comtés d'Angleterre :

quatre comtés sont ainsi disposés, ce qui prouve que quatre couleurs au moins sont nécessaires. Pouvez-vous les identifier sur la carte de la page précédente (légèrement simplifiée) ?



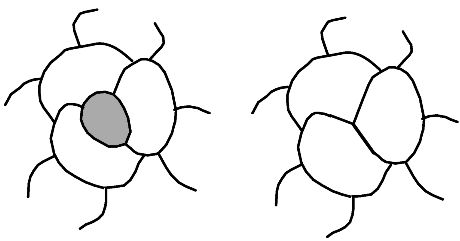
Une carte simple, quatre couleurs nécessaires.

De Morgan accomplit un premier pas en démontrant qu'il était impossible de trouver une carte dans laquelle cinq régions soient toutes adjacentes deux à deux. Mais le théorème des quatre couleurs ne s'en trouvait pas pour autant démontré. Tout ce que cela prouve, c'est que l'argument le plus simple susceptible de l'infirmer ne tient pas. On pourrait imaginer une carte très compliquée d'une centaine de régions, pour laquelle quatre couleurs ne suffiraient pas en raison de la manière dont certaines longues chaînes de régions se connectent à leurs voisines. Il n'y a aucune raison pour qu'une « mauvaise » carte contienne seulement cinq régions !

La première mention imprimée de ce problème date de 1878 – une lettre d'Arthur Cayley demandant aux *Proceedings of the London Mathematical Society* (une société fondée par De Morgan) si quelqu'un en était venu à bout. La réponse était négative. Mais l'année suivante, Arthur Kempe, un avocat, publia une démonstration qui semblait régler la question.

La démonstration de Kempe était brillante. Il y montrait d'abord que toute carte contient au minimum une région entourée de cinq voisines ou moins. Si une région est entourée de trois voisines, on peut la rétrécir jusqu'à la supprimer pour simplifier la carte, et si la carte simplifiée peut être coloriée avec quatre couleurs, cela vaudra aussi pour l'originale ; il suffit de donner à la région que l'on a fait disparaître la couleur qui n'est utilisée par aucune de ses trois voisines.

Kempe proposa également une méthode, plus compliquée, pour se débarrasser des régions admettant quatre ou cinq voisines. Une fois ce résultat clé établi, le reste de la démonstration venait tout seul : pour colorier une carte avec quatre couleurs, il faut la réduire, région par région, jusqu'à ce qu'il ne reste plus que quatre régions ou moins. On colorie ces quatre régions de couleurs différentes, et on déroule les opérations en sens inverse : on réintègre les régions une à une en les coloriant selon les règles de Kempe. Simple comme tout !



Si la carte de droite peut être coloriée avec quatre couleurs, celle de gauche aussi.

Cela semblait trop beau pour être vrai... À juste titre. En 1890, Percy Heawood découvrit que les règles de Kempe ne s'appliquaient pas toujours. Si l'on réduit une région dotée de cinq voisines, on peut se retrouver en très fâcheuse posture au moment de la réintégrer. En 1891, Peter Guthrie Tait crut avoir réglé le problème, mais Julius Petersen trouva à son tour une erreur dans la méthode de Tait.

Heawood remarqua qu'en adaptant la méthode de Kempe on pouvait démontrer que cinq couleurs suffisent toujours pour colorier une carte. Mais personne n'était capable de trouver une carte *nécessitant* plus de quatre couleurs... Il y avait de quoi désespérer, et cette affaire des quatre couleurs tourna au cauchemar. Quand on sait qu'un problème mathématique a une solution qui est forcément 4 ou 5, on devrait être capable de trancher ! Sauf que... personne n'y arrivait.

On progressa alors par sauts de puce, comme toujours dans ces cas-là. En 1922, Philip Franklin démontra que toutes les cartes de 26 régions ou moins étaient 4-coloriables. Ce n'était pas fabuleux en soi, mais la méthode de Franklin préparait le terrain de la résolution définitive en introduisant l'idée de « configuration réductible ». Une configuration est un ensemble de régions connectées sur la carte, complété de quelques informations sur le nombre de régions adjacentes à celles de la configuration. Une configuration étant donnée, on peut l'enlever de la carte pour obtenir une carte simplifiée comprenant moins de régions. Une configuration est *réductible* à une condition : il doit y avoir moyen de 4-colorier la carte originale dès lors que l'on a 4-colorié la carte simplifiée. Il faut en effet pouvoir remettre les couleurs dans la configuration après que tout le reste a été 4-colorié.

Une région unique entourée de trois voisines constitue une configuration réductible, par exemple. Ôtez-la et 4-coloriez le reste, si c'est possible. Puis remettez-la et donnez-lui une couleur qui n'ait été utilisée pour aucune des trois autres. La preuve ratée de Kempe établit clairement qu'une région flanquée de quatre voisines constitue une configuration réductible. Où il se trompe, c'est en affirmant qu'il en va de même pour les régions entourées de cinq voisines.

Franklin a découvert que, parfois, des configurations contenant plusieurs régions sont réductibles alors que des régions uniques ne le sont pas. Beaucoup de configurations multirégionales se révèlent réductibles.

La démonstration de Kempe aurait été valable si toutes les régions entourées de cinq voisines étaient réductibles. Et ce pour une raison des plus éclairantes... Kempe pensait en effet avoir démontré deux résultats. Primo, toute carte contient une région entourée de trois, quatre ou cinq voisines. Secundo, chacune de ces configurations est réductible. Ces deux énoncés réunis impliquent que *toute carte* contient une configuration réductible. Et donc qu'une fois une configuration réductible supprimée d'une carte, la carte simplifiée qui en résulte contient elle aussi une configuration réductible. En éliminant cette dernière, on se retrouve dans la même situation... Par étapes successives, on se débarrasse ainsi de toutes les configurations réductibles, jusqu'au moment où il ne reste plus que quatre régions, voire moins. On les colorie alors à sa guise – quatre couleurs maximum suffisent – puis on réintègre la configuration précédente. Comme elle était réductible, la carte ainsi modifiée ne nécessite pas plus de quatre couleurs. Et l'on continue. À force de revenir en arrière, on retombe enfin sur la carte originale – dûment 4-coloriée.

Ce raisonnement ne vaut que parce que toute carte contient une de ces configurations réductibles. Elles constituent un « ensemble inévitable ».

La démonstration tentée par Kempe s'est révélée fausse car une de ces configurations n'est pas réductible – la région avec cinq voisines. Mais le message de Franklin se veut rassurant. Il suffit, dit-il, de prendre une liste plus grande, avec des configurations bien plus complexes. Oubliez les régions à cinq voisines ! Remplacez-les par plusieurs configurations de deux ou trois régions. La liste peut être aussi longue qu'on veut. Il suffit de trouver *un* ensemble inévitable de configurations réductibles : peu importe qu'il soit énorme et ne ressemble à rien, du moment qu'il existe on a gagné.

De fait – et c'est important pour la démonstration finale –, on peut s'en tenir à une conception plus faible de l'« inévitabilité », limitée à des cas posant à peine problème. J'entends par là les hypothétiques cartes dont un bloc de cinq régions nécessite cinq couleurs – mais avec la propriété que toute carte plus petite n'en requiert que quatre. Cette condition supplémentaire rend plus facile de démontrer qu'un ensemble est inévitable. Ironie du sort, une fois le théorème prouvé, il apparaît qu'il n'existe pas de tels « cas posant à peine problème ». Peu importe : c'est là la stratégie de la démonstration.

En 1950, Heinrich Heesch, à qui l'on doit une brillante méthode permettant de démontrer la réductibilité de nombreuses configurations, affirma que selon lui, on pouvait prouver le théorème des quatre couleurs en trouvant un ensemble inévitable de configurations réductibles. Mais c'était là toute la difficulté : en trouver un... Car d'après un calcul « à la louche », il devrait contenir environ 10 000 configurations !

En 1970, Wolfgang Haken venait d'apporter quelques améliorations à la méthode de Heesch permettant de démontrer la réductibilité des configurations. Et il commença à se dire qu'une démonstration assistée par ordinateur était à portée de la main. Il devait être possible de concevoir un programme vérifiant la réductibilité de chaque configuration dans un ensemble donné... On pourrait évidemment écrire à la main des milliers de configurations. Prouver qu'elles sont inévitables serait certes chronophage, mais pas forcément infaisable. Sauf qu'avec les ordinateurs de l'époque il aurait fallu un siècle pour venir à bout d'un ensemble inévitable de 10 000 configurations. Ceux d'aujourd'hui font ça en quelques heures, mais Haiken devait se débrouiller avec les moyens du bord. En d'autres termes, il devait apporter des améliorations théoriques et ramener les calculs à une taille plus raisonnable.

En collaboration avec Kenneth Appel, Haken se mit à « dialoguer » avec son ordinateur. Il imaginait de nouvelles méthodes pour attaquer le problème, et l'ordinateur effectuait des séries de calculs pour dire si ces méthodes avaient quelque chance d'aboutir. En 1975, la taille d'un ensemble inévitable avait été ramenée à 2 000 configurations, et les deux mathématiciens avaient trouvé des tests beaucoup plus rapides pour démontrer l'irréductibilité. On avait à présent tout lieu de penser que la collaboration homme-machine permettrait d'arriver au but. En 1976, Appel et Haken attaquèrent la dernière ligne droite : il fallait maintenant concevoir un ensemble inévitable approprié. Ils saisissaient dans l'ordinateur l'ensemble de configurations qu'ils avaient en tête ; celui-ci testait chaque configuration pour vérifier son irréductibilité. Toute configuration refusée était remplacée par une ou plusieurs autres, dont l'ordinateur testait à nouveau l'irréductibilité. Il s'agissait d'un processus délicat dont rien ne prouvait qu'il s'arrêterait – mais s'il se stabilisait, ils auraient bel et bien trouvé un ensemble inévitable de configurations irréductibles.

En juin 1976, le processus aboutit. L'ordinateur fit son rapport : l'ensemble des configurations – 1 936 à ce stade, leur nombre devait plus tard tomber à 1 405 – était inévitable, et chacune de ces 1 936 configurations était irréductible. La démonstration était achevée.

Le calcul, à l'époque, prit mille heures, et le test de réductibilité ne comptait pas moins de 487 règles. Aujourd'hui, avec nos ordinateurs plus rapides, le tout peut s'effectuer en une heure. D'autres mathématiciens ont trouvé des ensembles inévitables plus petits et amélioré les tests de réductibilité. Mais personne n'a encore réussi à réduire suffisamment la taille de l'ensemble inévitable pour qu'un être humain puisse vérifier qu'il convient sans aide informatique. Et quand bien même on y arriverait, ce type de démonstration ne donne pas d'explication satisfaisante de la raison pour laquelle le théorème est vrai. Elle revient à dire : « Faites beaucoup de calculs et vous verrez, le résultat final est bon. » Ce sont, certes, des calculs de haute volée, et il y a là quelques idées ingénieuses, mais la majorité des mathématiciens aimeraient *comprendre* un peu mieux ce qui est vraiment en jeu. Une approche envisageable serait d'introduire une notion de « courbure » des cartes et d'interpréter la réductibilité comme une sorte de processus d'aplatissement. Mais nul n'a encore trouvé comment y parvenir.

Quoi qu'il en soit, nous savons à présent que le théorème des quatre couleurs est vrai, ce qui répond à la question en apparence innocente de Francis Guthrie. Et c'est une sacrée performance, même si rien n'eût été possible sans le coup de pouce d'un ordinateur...

Réponse p. 296.

9. Nuit de Chine, nuit canine

Le noble chevalier Lancebière chevauchait en pays étranger. Soudain, il y eut un éclair blanc, puis un grondement de tonnerre assourdissant – et toute l'eau du ciel chut. Craignant fort la rouille, notre chevalier se précipita vers l'abri le plus proche, le château du duc Chiffrelettre. Il y trouva dame Genièvre, son épouse, en larmes.

Le chevalier Lancebière prisait fort les jeunes et jolies dames, et il lui sembla saisir l'éclat d'une œillade à travers ces larmes. Chiffrelettre était vieux et chétif... Lancebière se promit que rien ne saurait l'empêcher d'avoir avec la belle un rendez-vous galant. Rien, sauf, naturellement, la seule chose au monde qu'il ne pût endurer.

Les contrepèteries à deux balles.

Après avoir salué le duc, Lancebière demanda à la dame ce qui lui causait tant de chagrin.

« C'est mon oncle, sire Grovin, souffla-t-elle. Il est mort hier...

— Permettez que je vous présente mes très sincères condoléances, dit Lancebière.

— Ce n'est pas là ce qui me fait ainsi sangloter, noble chevalier, soupira Genièvre. En vérité, mes cousins Pif, Hercule et Arthur se montrent incapables d'exécuter les volontés formulées par mon oncle dans son testament...

— Comment cela ?

— Voilà : sire Grovin, à ce qu'il paraît, a englouti toute la fortune familiale dans un élevage de chiens de créneau géants. Il en avait dix-sept. »

Lancebière n'avait jamais eu vent de chiens de créneau, mais il ne voulut rien laisser paraître de son ignorance devant une aussi gracieuse dame. Il avait tort de s'inquiéter :

« Quoique j'aie beaucoup entendu parler de ces animaux, jamais je n'en ai vu de mes yeux, dit Genièvre.

— Ce n'est pas un spectacle pour une dame de qualité, intervint Chiffrelettre d'un ton bref.

— Et que stipule le testament de votre oncle ? s'enquit Lancebière pour détourner la conversation.

— Eh bien... Sire Grovin lègue tout à ses trois fils. Pif doit avoir la moitié des chiens, Hercule le tiers et Arthur le neuvième.

— Diable. Quelle embrouille.

— Et attention : pas question de couper une bête, sire chevalier [1]. »

En entendant ces mots, Lancebière se raidit. Mais non, ce lamentable contrepet était involontaire.

« Ma foi..., commença Lancebière.

— Bah ! C'est un casse-tête vieux comme Hérode, siffla Chiffrelettre avec mépris. Il suffit de prendre un de nos chiens de créneau à nous et de le conduire au château de sire Grovin. Du coup, il y aura dix-huit de ces satanées bestioles...

— Sans doute, mon noble époux, j'entends bien la numérologie, mais...

— Une moitié va au premier fils, soit neuf chiens ; un tiers va au second, soit six chiens ; et le troisième a droit à un neuvième, soit deux. On arrive à dix-sept, et nous récupérons notre chien !

— À merveille, noble époux, mais nul n'est assez courageux, ici, pour chevaucher un tel chien... »

Lancebière sauta sur l'occasion.

« Si fait, sire. Je le ferai ! »

Le regard éperdu d'admiration que lui lança Genièvre lui prouva qu'il avait finement joué.

1. NdT : Les deux lettres à intervertir sont le ê de bête et le i de sire.

« Parfait, dit Chiffrelettre. Je m'en vais donc mander au gardien de notre chenil qu'il nous amène l'animal dans la cour. Nous l'y rejoindrons. »

Ils attendirent sous le porche tandis que la pluie continuait de tomber. Lorsque le chien entra dans la cour, la mâchoire de Lancebière se décrocha si violemment qu'il rendit grâce au ciel d'avoir conservé son casque attaché. D'une hauteur atteignant les créneaux du château, l'animal avait un épais pelage rayé, des griffes longues et acérées comme des épées. Ses yeux rouges lançant des flammes étaient gros comme le bouclier de Lancebière. Ses oreilles énormes tombaient jusqu'au sol, et il avait une queue de cochon recouverte d'épines pointues. Sa fourrure d'où l'eau dégouttait en cascades dégageait une puanteur indescriptible.

Sur son dos, improbable, était fixée une selle.

À la vue de cette monstruosité, Genièvre sembla encore plus effarée que le chevalier. Mais Lancebière ne se laissa pas démonter. Rien n'aurait pu entamer sa confiance. Rien n'aurait pu l'empêcher d'avoir son rendez-vous galant avec la dame, au retour de sa chevauchée sur le chien géant, une fois exécutées les dernières volontés de sire Grovin. Rien, sauf...

En vérité, jamais le chevalier n'enfourcha sa monstrueuse monture pour la conduire au château de sire Grovin. Et à sa connaissance, le testament de ce dernier n'a toujours pas été exécuté. Au lieu de quoi, la rage au cœur, mortellement offensé, Lancebière, plantant là Genièvre, s'en retourna à cheval dans la tempête pour se morfondre dans les affres d'un désir inassouvi.

À qui la faute ? Pas à l'arithmétique tarabiscotée de Chiffrelettre, non, mais à quelques mots que glissa la dame en aparté à son époux...

Qu'a-t-elle dit ?

Réponse p. 297.

10. La queue du chat balance

0 chat à 8 queues + 1 chat à 1 queue = 1 chat à 9 queues.

11. Des lapins dans un chapeau

Le célèbre magicien Oliver Twist posa son chapeau sur la table.

« Il y a deux lapins dans ce chapeau, déclara-t-il. Chacun est soit noir soit blanc, avec des probabilités égales. Et maintenant, grâce à l'aide de ma charmante assistante Miss Claudy Schaffer, je vais vous démontrer que je peux deviner leur couleur sans regarder dans le chapeau ! »

S'approchant de son assistante, il sortit un lapin noir de son décolleté. « Veuillez déposer ce lapin dans le chapeau, je vous prie. » Elle obéit.

Mettez-le dans le chapeau, vous saurez combien il y en a dedans.

Il se tourna vers le public : « Avant que Miss Claudy Schaffer n'ait mis le troisième lapin dans le chapeau, il y avait quatre combinaisons possibles : BB, BN, NB, NN, dit-il en écrivant sur une ardoise. Toutes étaient également probables, ce qui fait une probabilité de 1/4 pour chaque combinaison. Mais j'ai ajouté un lapin noir. Les combinaisons sont donc maintenant : NNN, NBN, NNB, NBB – avec de nouveau une probabilité de 1/4 chacune.

Supposons maintenant – je n'en ferai rien, ce n'est qu'une supposition – que je retire un lapin du chapeau. Quelle est la probabilité pour qu'il soit noir ? Si la combinaison est NNN, la probabilité est de 1. Pour NBN ou NNB, elle est de 2/3. Enfin, pour NBB, elle sera de 1/3. Tout cela mis bout à bout, la probabilité de faire sortir un lapin noir est de :

$$\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$$

soit précisément 2/3.

Or, s'il y a trois lapins dans un chapeau, dont *r* sont noir(s) et le reste blanc(s), la probabilité d'enlever un lapin noir est de *r*/3. Donc, *r* = 2, ce qui veut dire qu'il y a 2 lapins noirs dans le chapeau. » Sur ce, le magicien plongea la main dans le chapeau et en retira un lapin noir. « Comme c'est moi qui ai ajouté ce lapin noir, j'en déduis qu'à l'origine il y avait dans ce chapeau un lapin noir et un lapin blanc ! »

Le grand Oliver Twist salua le public dans un tonnerre d'applaudissements. Puis il sortit deux lapins du chapeau – l'un mauve clair, l'autre rose vif...

Qu'on ne puisse connaître le contenu d'un chapeau sans aller voir ce qu'il y a dedans, voilà qui semble évident. En ajoutant un lapin que l'on retire ensuite (était-ce le *même* lapin noir ? est-ce important ?), on égare le public de façon astucieuse.

Mais où se situe l'erreur, au juste ?

Réponse p. 298.

12. Comment traverser une rivière (1) : les produits de la ferme

Érudit, homme d'Église et poète du VIII^{e} siècle, Alcuin d'Ombrie, alias Flaccus Albinus ou encore Alcuinus, joua un rôle important à la cour de Charlemagne. Dans une de ses lettres à l'empereur, il glissa cette devinette présentée comme un modèle de « subtilité arithmétique, pour le plaisir de Votre Majesté ». Elle n'a rien perdu de son intérêt mathématique, comme nous le verrons. La voici.

Un fermier se rend au marché pour y vendre un loup, une chèvre et un panier rempli de choux. Il arrive à une rivière où se trouve amarré un petit bateau. Le bateau est si petit que le fermier ne peut emporter qu'une des trois marchandises à la fois. Impossible de laisser le loup avec la chèvre, ou la chèvre avec les choux, pour des raisons qui vont de soi. Heureusement, le loup a horreur des choux. Comment s'y prend le fermier pour faire traverser la rivière à ses trois marchandises ?

Réponse p. 299.

13. Nouvelles curiosités arithmétiques

Les quelques curiosités arithmétiques que voici sont des variations autour d'un même thème.

1) Soit un nombre à trois chiffres – par exemple, 471. Tapez-le sur votre calculette – une fois, deux fois : vous obtenez 471 471. Divisez ce nombre par 7. Divisez ensuite le résultat obtenu par 11, et le nouveau résultat par 13. Cela donne :

$$\frac{471\,471}{7} = 67\,353$$

$$\frac{67\,353}{11} = 6\,123$$

$$\frac{6123}{13} = 471$$

c'est-à-dire votre nombre de départ.

Répétez la même opération avec n'importe quel autre nombre à trois chiffres – ça marche.

Mais les mathématiques ne se limitent pas à l'observation de phénomènes curieux. Il importe aussi de découvrir leur explication. Pour y arriver, il faut ici prendre le calcul à l'envers. L'inverse de la division est la multiplication. L'opération inverse de celle que nous avons effectuée consiste à partir du nombre 471, qu'on va multiplier par 13, puis par 11, puis par 7, soit :

$$471 \times 13 = 6\ 123$$
$$6\ 123 \times 11 = 67\ 353$$
$$67\ 353 \times 7 = 471\ 471$$

Rien de très concluant, semble-t-il. Cela nous dit tout de même que $471 \times 13 \times 11 \times 7 = 471\ 471$.

Il pourrait être intéressant de calculer le produit $13 \times 11 \times 7$. Prenez votre calculette, et allez-y... Alors, que remarquez-vous ? Est-ce l'explication de ce tour ?

2) Les mathématiciens adorent « généraliser ». C'est-à-dire qu'ils aiment identifier les diverses déclinaisons d'une même idée. Prenons un nombre à quatre chiffres, par exemple 4 715. Par quoi faut-il le multiplier pour obtenir 47 154 715 ? Peut-on y arriver en plusieurs étapes, en multipliant ce nombre par une suite de nombres plus petits ?

Pour commencer, divisez 47 154 715 par 4 715...

3) Si votre calculette va jusqu'à 10 chiffres – c'est souvent le cas aujourd'hui –, transposez ce tour mathématique pour les nombres à cinq chiffres.

4) Si elle va jusqu'à 12 chiffres, reprenez un nombre à 3 chiffres – par exemple, 471. Mais cette fois, au lieu de le multiplier par 7, 11 et 13, multipliez-le par 7, 11, 13, 101, puis 9 901. Qu'observe-t-on ? Pourquoi ?

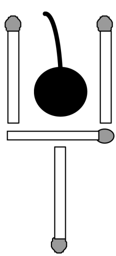
5) Choisissez un nombre à trois chiffres – par exemple, 128. Multipliez-le successivement par 3, 3, 3, 7, 11, 13 et 37 (oui, trois multiplications par 3 !). Le résultat est 127 999 872. Rien de particulier jusqu'ici. Ajoutez-y le nombre dont vous êtes parti. Quel résultat obtenez-vous, à présent ?

Réponse p. 300.

14. Enlevez la cerise

Cette devinette est un bon vieux classique, avec une solution toute simple sur laquelle on se casse les dents.

La cerise est à l'intérieur du verre à cocktail, constitué de quatre allumettes. Vous avez le droit de bouger au maximum deux allumettes pour qu'elle soit hors du verre. Le verre peut être posé sur le côté, ou la tête en bas, comme vous voulez, du moment que sa forme ne change pas.

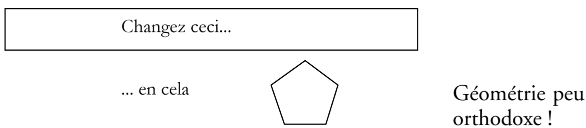


Bougez deux allumettes pour sortir la cerise du verre.

Réponse p. 301.

15. Métamorphose en pentagone

Voici un long et fin rectangle de papier. Le but du jeu est de le transformer en pentagone régulier (une figure à cinq côtés égaux, dont tous les angles sont identiques).



Réponse p. 301.

16. Qu'est-ce que π ?

Le nombre π, dont une valeur approchée est 3,14159, correspond à la circonférence d'un cercle de diamètre 1. D'une façon générale, un cercle de diamètre *d* a une circonférence de π × *d*. On peut donner comme première approximation de la valeur de π : 22/7, mais cela reste imprécis. 22/7 font environ 3,14285 – ce qui est inexact à partir de la 3^{e} décimale. On tombe plus juste avec 355/113, qui a six décimales communes avec π : 3,1415929 pour l'un, 3,145926 pour l'autre.

Comment sait-on que π n'est pas une fraction exacte ? Parce qu'on a beau diviser l'un par l'autre des nombres de plus en plus grands, x/y ne donne jamais π, seulement des approximations de plus en plus fines. Un nombre qui ne peut s'écrire sous forme de fraction est dit *irrationnel*. La preuve la plus simple que π est *irrationnel* utilise le calcul intégral ; elle a été trouvée par Johann Lambert en 1770. S'il est impossible d'écrire une représentation numérique exacte de π, diverses formules permettent cependant de le définir précisément, et la preuve de Lambert se sert de l'une d'elles.

En fait, de façon plus remarquable, π est un nombre *transcendant*. C'est-à-dire qu'il n'est la solution d'aucune équation algébrique, et qu'il n'est donc en relation avec aucun nombre rationnel. Ferdinand von Lindemann l'a démontré en 1882, lui aussi au moyen du calcul intégral. Le fait que π soit transcendant implique que le problème géométrique de la « quadrature du cercle » n'a pas de solution. Ce problème consiste à trouver une « construction euclidienne » d'un carré dont la surface soit exactement équivalente à celle d'un cercle donné. Une méthode de construction est dite « euclidienne » si elle recourt exclusivement à une règle non graduée et à un compas...

17. Légiférer sur π ?

Une légende tenace veut que l'État de l'Indiana (certains disent l'Iowa, d'autres l'Idaho...) ait arrêté par décret de loi la valeur légale de π à 3 selon certains, 19/6 selon d'autres.

Dans tous les cas, c'est faux.

Mais il a bien failli, hélas, se produire quelque chose du même genre. On ne sait pas exactement quelle était la valeur de π retenue : le document semble en proposer au moins neuf différentes, toutes erronées. La loi n'est pas passée : elle a été ajournée *sine die*, et elle le reste semble-t-il. Il s'agit du projet de loi 246 de l'Indiana, daté de 1897, qui conférait gratuitement à l'État l'usage exclusif d'une « nouvelle vérité mathématique ». Le projet, lui, est passé – rien de surprenant, dès lors qu'il n'impliquait aucune obligation pour l'État. Il a même été voté à l'unanimité.

En quoi consistait cette « nouvelle vérité » ? Il s'agissait en fait d'une pseudo-résolution compliquée et incorrecte du problème de la quadrature du cercle – qui se propose de construire π géométriquement. Un journal d'Indianapolis a rappelé à cette occasion dans un article que la quadrature du cercle était impossible. Et quand le moment est venu pour le Sénat de confirmer ce projet de loi, les politiciens – tout ignares qu'ils étaient pour la plupart en la matière – ont bien senti qu'il y avait un os. Sans doute les efforts du professeur C.A. Waldo, de l'Académie des sciences de l'Indiana, y furent-ils pour quelque chose : la visite opportune qu'il rendit à la Chambre au moment des débats aida sûrement les esprits à se concentrer. Toujours est-il qu'on renonça à débattre de la validité des mathématiques ; il fut décidé que ce sujet ne se prêtait pas à législation. Le projet fut donc ajourné… 111 années plus tard, il l'est toujours.

La paternité de cette trouvaille revient presque certainement à Edwin J. Goodwin, un médecin féru de mathématiques vivant à Solitude, dans le comté de Posey (Indiana). Cet amateur prétendit à plusieurs reprises avoir réalisé, outre la quadrature du cercle, la trisection de l'angle et la duplication du cube – deux célèbres défis tout aussi impossibles.

Quoi qu'il en soit, l'Indiana n'a pas *délibérément* tenté d'imposer par décret une valeur incorrecte de π… Même s'il est vrai que l'adoption du décret aurait donné force de loi à la méthode de Goodwin, preuve de son efficience en matière de législation sinon de mathématiques. Mais c'est là un point de droit délicat à trancher.

18. Si la loi était passée…

Si l'État de l'Indiana avait voté l'application du projet de loi 246, si la loi avait entériné le pire des scénarios – instaurant une différence de fait entre la valeur légale de π et sa valeur mathématique –, les conséquences de cette situation n'auraient pas manqué de sel. Supposons que la valeur légale soit $p \neq \pi$, la loi décrétant que $p = \pi$.

Alors :

$$\frac{p-\pi}{p-\pi}=1 \quad \text{mathématiquement}$$

Mais :

$$\frac{p-\pi}{p-\pi}=0 \quad \text{légalement.}$$

Or, les vérités mathématiques ont force de loi. Donc, la loi implique que 0 = 1. Dès lors, tous les assassins ont une défense imparable : il leur suffit d'avouer un crime, puis de faire valoir que légalement, cela équivaut à zéro crime. Mais ce n'est pas tout ! Zéro multiplié par un milliard égale un multiplié par un milliard, égale un milliard. Donc, un citoyen appréhendé alors qu'il n'a pas de drogue sur lui possède en vérité pour 1 milliard de dollars de drogue.

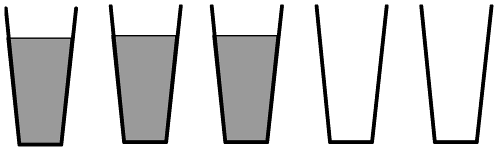
N'importe quelle proposition deviendrait légalement prouvable.

On peut douter que la loi pousse le respect de la logique jusqu'à admettre la validité en justice de tels arguments. Mais on a déjà vu des arguments encore plus stupides, souvent fondés sur un abus de statistiques, produire exactement le même résultat – et c'est ainsi que de malheureux innocents finissent sous les verrous pour de nombreuses années.

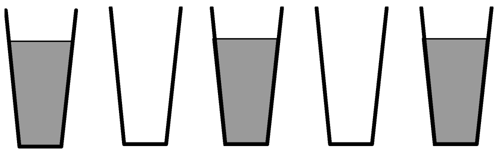
De là à dire que les législateurs de l'Indiana ont ouvert la boîte de Pandore...

19. Verres vides

Soit une rangée de 5 verres. Les trois premiers sont pleins, les deux autres vides. Comment les disposer selon une alternance plein/vide en n'en bougeant qu'un ?



Avant...



... après.

Réponse p. 302.

20. Combien...

... de combinaisons possibles des 26 lettres de l'alphabet ?

403 291 461 126 605 635 584 000 000

... de résultats possibles quand on bat un paquet de cartes ?

80 658 175 170 943 878 571 660 636 856 403 766
975 289 505 440 883 277 824 000 000 000 000

... de positions possibles pour un Rubik's Cube ?

43 252 003 274 489 856 000

... de grilles de sudoku ?

6 670 903 752 021 072 936 960

(Calcul effectué par Bertram Felgenhauer et Frazer Jarvis en 2005.)

... de séquences possibles de 100 zéros et un ?

1 267 650 600 228 229 401 496 703 205 376

21. Trois colles au débotté

1) Au bridge, après que quatre mains ont été jouées, est-il plus probable : que votre partenaire et vous ayez tous les piques, ou que vous n'en ayez aucun ?

2) Si vous retirez trois bananes d'un plat qui en contient treize, combien avez-vous de bananes ?

3) Une secrétaire imprime six lettres et prépare six enveloppes aux noms de leurs destinataires. Toujours pressé, son patron s'en mêle et glisse au petit bonheur les lettres dans les enveloppes – une lettre par enveloppe. Quelle est la probabilité pour que cinq lettres exactement, pas une de plus, pas une de moins, soient dans la bonne enveloppe ?

Réponse p. 302.

22. Le périple du cavalier

Aux échecs, le cavalier se déplace d'une façon particulière. Il avance de deux cases horizontalement ou verticalement, puis d'une case perpendiculairement, sautant par-dessus les pièces qui se trouvent sur sa route. La géométrie de ses déplacements a inspiré toutes sortes de divertissements mathématiques, dont le plus simple est « le périple du cavalier ». Le cavalier doit sillonner tout l'échiquier (ou toute autre grille) de façon à s'arrêter une fois, et une seule, sur chaque case. Le schéma ci-dessous donne un exemple de trajectoire sur

IAN STEWART

Mon cabinet de curiosités mathématiques

Avis aux collectionneurs ! La science mathématique a aussi ses curiosités. Et Ian Stewart en sait quelque chose. À l'âge de la première addition, il accumulait les énigmes mathématiques comme d'autres les coléoptères ou les blagues Carambar. Avec lui, les maths deviennent un rébus, un conte, un grand livre d'histoires cocasses ou fascinantes.

Connaissez-vous l'oracle de Kevin Bacon ? Le point commun entre Fibonacci et une marguerite ? entre la théorie du chaos et un lave-vaisselle ? Quelle est, d'après vous, la valeur des nombres plastiques ?

De quoi stimuler vos neurones, avec d'autant plus de plaisir que l'humour est au rendez-vous.

Ian Stewart lauréat du prix Faraday en 1995 et professeur émérite de mathématiques à l'université de Warwick. Il est notamment l'auteur, en Champs, de *Mathématiques du vivant* (2016), de *La Chasse aux trésors mathématiques* (2018) et de *17 équations qui ont changé le monde* (2022).

Traduit de l'anglais par Laurence Decréau.

En couverture : Illustration par François Lamidon d'après des images © Shutterstock/Sirastock, Triff, MarcoFood, Ovidiu Marian, Jamie Wilson, Kirill Guzhvinsky, Anan Kaewkhammul, Miguel G. Saavedra, Marco Tulio, Chuck Aghoian, 22 TREE HOUSE, Andrey_Kuzmin, Fedorov Oleksiy, Tupungato, Andersphoto, 3d_kot

Flammarion

23-IX Création Studio Flammarion